



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

Г.А. Кокотушкин, П.В. Храпов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО КУРСУ «МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Г.А. Кокотушкин, П.В. Храпов

Методические указания
к решению задач по курсу
"Методы вычислений"

Под редакцией Г.А. Кокотушкина

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2001

УДК 518.12

ББК 22.193

К60

Рецензент А.А.Федотов

К60 Кокотушкин Г.А., Храпов П.В. Методические указания к решению задач по курсу "Методы вычислений" / Под ред. Г.А. Кокотушкина. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 44 с., ил.

ISBN 5-7038-1847-8

В методических указаниях содержатся определения важнейших понятий вычислительной математики, постановка основных вычислительных задач инженерной практики, а также описание классических методов их решения и особенности алгоритмов.

Для студентов II курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ил. 13. Библиогр. 8 назв.

УДК 518.12

ББК 22.193

Георгий Александрович Кокотушкин

Павел Васильевич Храпов

Методические указания к решению задач по курсу
"Методы вычислений"

Редактор О.М. Королева

Корректор О.В. Калашникова

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97.

Подписано в печать 20.06.01. Формат 60x84/16. Бумага офс. № 2.

Печ.л. 2,75. Усл.печ.л. 2,56. Уч.-изд.л. 2,42.

Тираж 50 экз. Изд. № 73. Заказ № 77

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

ISBN 5-7038-1847-8



МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Аппроксимация функций	3
§ 2. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений	12
§ 3. Численные методы решения задач оптимизации	24
Задачи	39
Список литературы	44

§ I. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Задача наилучшего приближения в средней норме. Метод наименьших квадратов (МНК). Аппроксимация многочленами. Аппроксимация по ортогональной системе функций

Аппроксимация является второй из основных задач приближения функций и заключается в построении аналитически заданной функции, проходящей достаточно близко от значений данной функции во всех узлах сетки, но необязательно через сами заданные точки. Расстояние между аппроксимируемыми функциями $z(x)$ и $y(x)$ измеряется в средней норме: $R = \|z - y\| = \sqrt{(z - y, z - y)}$. Такая постановка задачи является актуальной, если известен класс функций, к которому принадлежит $y(x)$. Ясно, что искать $z(x)$ следует в том же классе. Кроме того, значения y_i могут быть заданы с относительно большими случайными ошибками. Требовать прохождения приближающей функции через эти значения в этом случае бессмысленно.

Геометрическая интерпретация задачи приведена на рис. I.I. Погрешность аппроксимации (скалярное произведение) вычисляется в векторном пространстве V_{n+1} , так как функция $y(x)$ задана в виде вектора:

$$y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Таким образом, погрешность аппроксимации рассчитывается по формуле

$$R = \sqrt{\sum_{i=0}^n (z_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^n \delta_i^2} \quad (\text{I.I})$$

и называется среднеквадратичным отклонением.

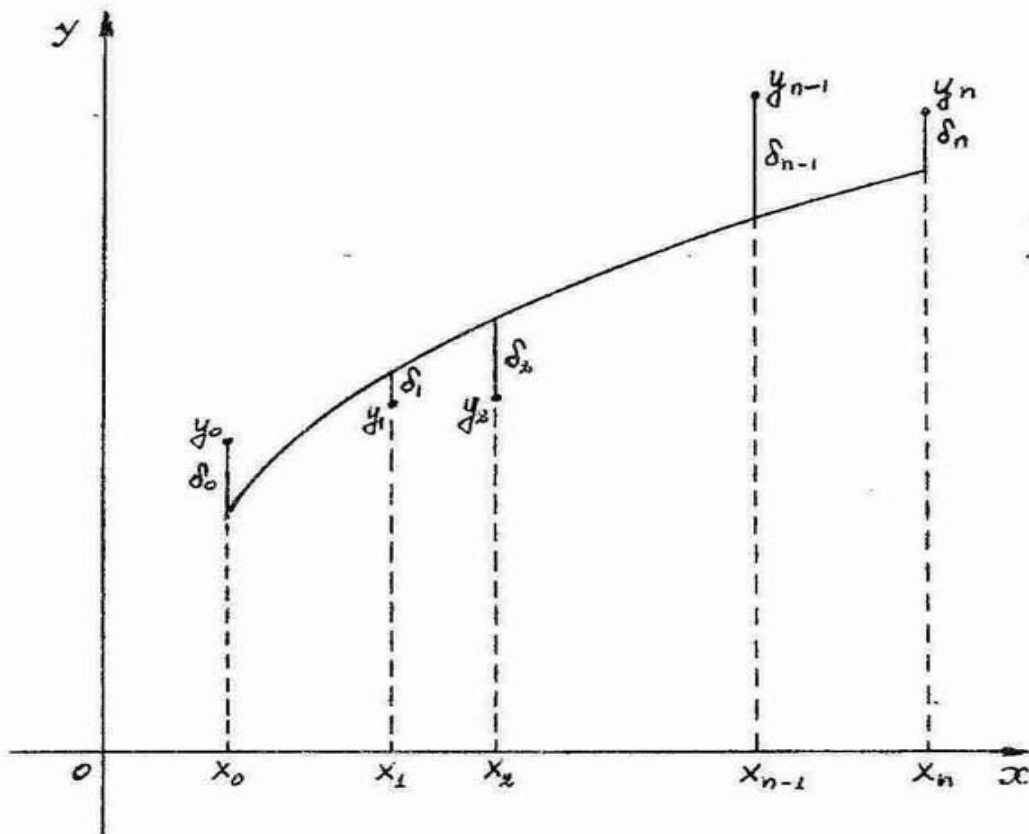


Рис. I.I

Задача наилучшего приближения ставится следующим образом. Рассматривается множество функций, принадлежащих одному классу и зависящих от параметров $\{z(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)\}$. Из этого множества необходимо выбрать функцию, наименее отличающуюся от заданной в норме E . То есть минимизируется величина

$$R(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (z(x_i; \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_i)^2}.$$

Это и определяет название метода – метод наименьших квадратов. Так как точка минимума R совпадает с точкой минимума R^2 , то решается задача минимизации функции

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^n (z(x_i; \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_i)^2. \quad (I.2)$$

Необходимым условием экстремума функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных:

$$\begin{aligned} F'_{\lambda_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0; \\ F'_{\lambda_2}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0; \\ &\vdots \\ F'_{\lambda_m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0. \end{aligned} \quad (I.3)$$

Следует отметить, что минимум функции $F(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, как правило, существует, так как она ограничена снизу:

$F(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \geq 0 \quad \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^m$. В то же время очевидно, что эта функция не ограничена сверху. Поэтому в случае единственного решения системы (I.3) соответствующая стационарная точка и определяет минимум.

Если количество параметров $m = n + 1$, то задача аппроксимации переходит в задачу интерполяции. Идея же аппроксимации состоит в том, чтобы приблизить данную функцию с помощью небольшого числа параметров, независимого от числа узлов сетки. Поэтому, как правило, справедливо соотношение $m \ll n$ (т.е. m много меньше n) и задача интерполяции неразрешима. Для того, чтобы оценка близости функций y и z практически не зависела от числа узлов, ее определяют по среднеквадратичному отклонению

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=0}^n (z(x_i) - y_i)^2 / (n + 1)}.$$

Рассмотрим пример решения задачи аппроксимации двухпараметрической функцией $z(x; a, b) = a e^{bx}$, предполагая, что зависимость $y(x)$ имеет экспоненциальный характер:

$$F(a, b) = \sum_{i=0}^n (a e^{bx_i} - y_i)^2;$$

$$F'_a = 2 \sum_{i=0}^n (a e^{bx_i} - y_i) e^{bx_i} = 0;$$

$$F'_b = 2 \sum_{i=0}^n (a e^{bx_i} - y_i) a e^{bx_i} x_i = 0.$$

После элементарных преобразований система примет вид

$$a \sum_{i=0}^n e^{2bx_i} = \sum_{i=0}^n y_i e^{bx_i};$$

$$a \sum_{i=0}^n e^{2bx_i} x_i = \sum_{i=0}^n y_i e^{bx_i} x_i.$$

Мы имеем нелинейную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее, получим значения a и b , минимизирующие функцию F' .

Наиболее простой вид система для определения параметров принимает в случае линейной зависимости искомой функции Z от параметров. Для этого выбирают линейно независимую систему функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ и с ее помощью ищут функцию Z в виде обобщенного многочлена

$$z(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x). \quad (I.4)$$

Поставленная задача имеет простую алгебраическую интерпретацию. Попробуем подобрать коэффициенты λ_j таким образом, чтобы во всех узловых точках значение аппроксимирующей функции совпало со значениями заданной:

$$z(x_i; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = y_i.$$

Для определения λ_j составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с прямоугольной матрицей порядка $(n+1) \times m$:

$$\lambda_1 \varphi_1(x_0) + \lambda_2 \varphi_2(x_0) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_0) = y_0;$$

$$\lambda_1 \varphi_1(x_1) + \lambda_2 \varphi_2(x_1) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1) = y_1; \quad (\text{I.5})$$

$$\lambda_1 \varphi_1(x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_n) = y_n.$$

При $m < n+1$ приходим к переопределенной системе уравнений (число уравнений превосходит количество неизвестных), не имеющей решения. Если считать столбцы элементов полученной матрицы векторами

$$\vec{s}_k = (\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), \dots, \varphi_k(x_n)), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

то система (I.5) эквивалентна тому, что вектор $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ представлен в виде линейной комбинации векторов \vec{s}_k : $\vec{y} = \lambda_1 \vec{s}_1 + \dots + \lambda_m \vec{s}_m$. Так как размерность соответствующего векторного пространства равна $n+1$, а $m < n+1$, то вектор \vec{y} может не принадлежать линейной оболочке системы векторов $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_m\}$ (понятие линейной оболочки рассмотрено в общем курсе линейной алгебры) и система (I.5) не будет иметь решения. Например, вектор $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2)$, не принадлежащий плоскости векторов \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , не может быть представлен в виде их линейной комбинации (рис. I.2).

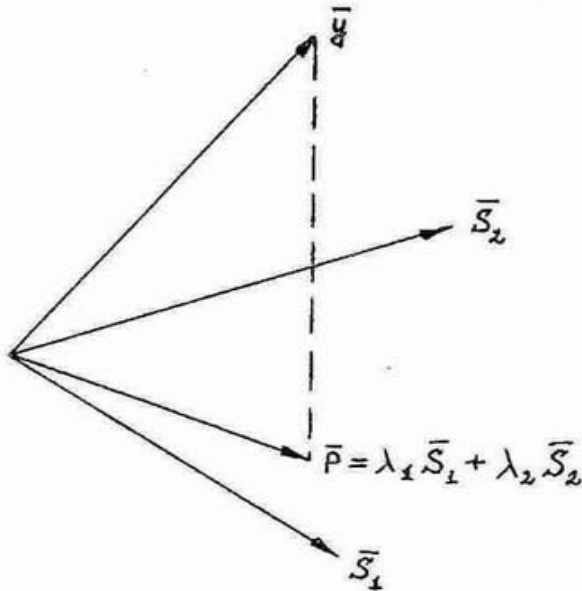


Рис. I.2

Свойство 2 приводится без доказательства.

Из перечисленных свойств следует, что оптимальным методом решения СЛАУ (I.7) является метод квадратного корня [I].

Пример. Будем искать аппроксимирующую функцию z в виде линейной комбинации алгебраических многочленов:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\},$$

т.е. $\varphi_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Вектор \vec{S}_i имеет вид $\vec{S}_i = (x_0^{i-1}, x_1^{i-1}, \dots, x_n^{i-1})$, а скалярные произведения (\vec{S}_i, \vec{S}_j) и (\vec{y}, \vec{S}_i) можно записать так:

$$(\vec{S}_i, \vec{S}_j) = \sum_{k=0}^n x_k^{i-1} x_k^{j-1} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j-2};$$

$$(\vec{y}, \vec{S}_i) = \sum_{k=0}^n x_k^{i-1} y_k.$$

Зададим таблично функцию $y(x)$:

x	-1	0	1	2
y	1	-1	1	4

Аппроксимируем ее прямой (рис. I.3) $z(x, \lambda_1, \lambda_2)$:

$$m = 2, \quad n = 3, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2;$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{s}_1, \vec{s}_1) &= 4; & (\vec{s}_1, \vec{s}_2) &= 2 = (\vec{s}_2, \vec{s}_1); \\
 (\vec{s}_2, \vec{s}_2) &= 6; & (\vec{y}, \vec{s}_1) &= 5, & (\vec{y}, \vec{s}_2) &= 8.
 \end{aligned}$$

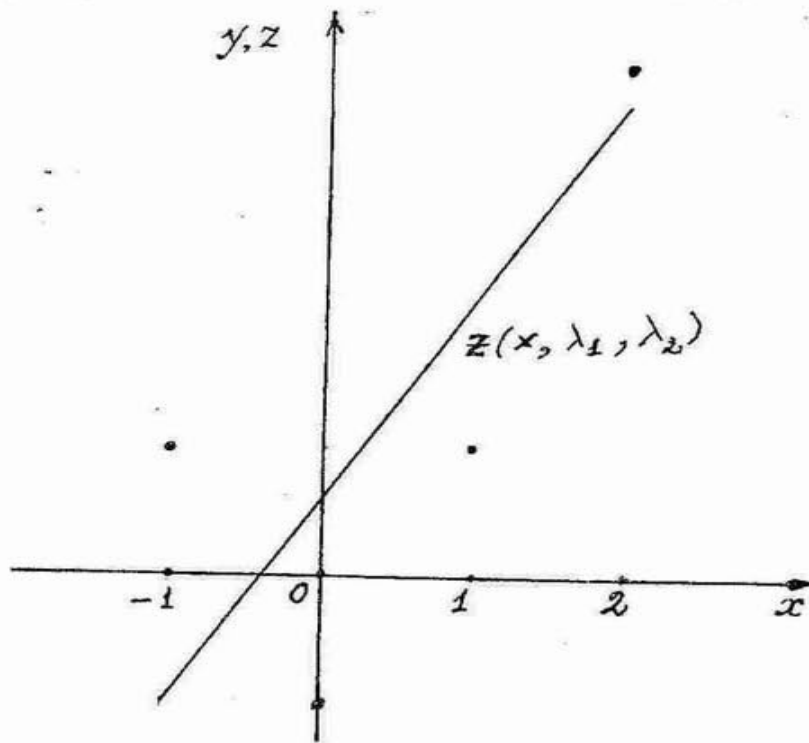


Рис. I.3

В результате получаем систему

$$\begin{aligned}
 4\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 5; \\
 2\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 8;
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0,7; \quad \lambda_2 = 1,1; \quad z(x) = 0,7 + 1,1x.$$

Замечания. I. Иногда функцию $z(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ можно представить в виде обобщенного многочлена (I.4) после некоторых преобразований. Например, функция $z = \alpha e^{bx}$, рассмотренная ранее, после логарифмирования будет выглядеть следующим образом: $\ln z = \ln \alpha + bx$. Если аппроксимировать теперь функцию $\ln y$ по системе $\{\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x\}$, то относи-

тельно величин $\lambda_1 = \ln \alpha$ и $\lambda_2 = b$ мы получим нормальную систему МНК (I.7) при $m = 2$. После ее решения легко определяется параметр $\alpha = e^{\lambda_1}$.

2. Можно показать [I], что система (I.7) имеет единственное решение, определяющее точку минимума функции $F(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Особенно удобно пользоваться среднеквадратичным приближением в случае, когда система функций $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ ортонормирована на отрезке $[x_0, x_n]$, т.е.

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Система векторов $\{\vec{s}_k\}$ также ортонормирована, и решение системы (I.7) выписывается в явном виде

$$\lambda_j = (\vec{y}, \vec{s}_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Коэффициенты λ_j в этом случае называют коэффициентами Фурье функции $y(x)$, а многочлен $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x)$ — многочленом Фурье.

Примерами ортогональных систем являются классическая тригонометрическая система функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right\}$, ортонормированная на отрезке $[-\pi, \pi]$ (по этой системе обычно приближают периодические функции) и многочлены Лежандра

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$; для первых номеров многочлены Лежандра легко выписываются в явном виде:

$$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad L_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \dots$$

Если исходный отрезок $[x_0, x_n]$ не совпадает с отрезком, на котором ортонормирована выбранная система функций, то можно сделать линейную замену переменной, переводящую отрезок $[x_0, x_n]$ в требуемый. Так, замена $t = \frac{1}{x_n - x_0} (2x - (x_n + x_0))$ переводит отрезок $[x_0, x_n]$ в $[-1, 1]$. Пусть мы хотим, например, аппроксимировать параболой функцию $y(x)$, заданную в точках $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Для этого можно использовать многочлены Лежандра $L_0(t)$, $L_1(t)$ и $L_2(t)$ с узлами аппроксимации $t_0 = \frac{1}{5} (2x_0 - 5) = -1$; $t_1 = -0,6$; $t_2 = -0,2$; $t_3 = 0,2$; $t_4 = 0,6$; $t_5 = 1$. Коэффициенты λ_i вычисляются по формуле

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^5 y_k L_i(t_k) ; i = 0, 1, 2 .$$

Для получения окончательного результата следует вернуться к старой переменной:

$$z(x) = \lambda_0 L_0\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + \lambda_1 L_1\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + \lambda_2 L_2\left(\frac{2}{5}x - 1\right),$$

$$0 \leq x \leq 5 .$$

§ 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разностная аппроксимация производных. Метод Эйлера. Решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 2-го порядка. Методы Рунге - Кутты. Многошаговые явные и неявные методы Адамса

Как известно, большинство динамических процессов описываются дифференциальными уравнениями (ДУ) и системами дифференциальных уравнений. Поэтому численное решение дифференциальных уравнений является одной из самых актуальных прикладных задач.

Часто для решения как ОДУ, так и ДУ в частных производных используют метод сеток, или разностный метод. Кроме того, эле-

менты этого метода в той или иной степени входят во все другие методы численного решения ДУ.

Определение 1. Сеткой на отрезке $[a, b]$ называется любое конечное множество точек этого отрезка.

Мы будем рассматривать только сетки следующего вида:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Точки x_i называются узлами сетки. Сетка называется равномерной, если $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$ - шаг сетки.

Рассмотрим равномерную сетку. Обозначим $y_i(x) = y(x_i)$.

Определение 2. Величины $y'_{i+} = (y_{i+1} - y_i) / h$,

$y'_{i-} = (y_i - y_{i-1}) / h$ и $y'_{i0} = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2h$ называются соответственно правой, левой и центральной разностными производными функции $y(x)$ в точке x_i .

При $h \rightarrow 0$ каждая из этих величин стремится к значению производной в точке x_i . Напомним, что применять этот способ для численного получения производной нельзя из-за роста вычислительной погрешности.

Если разложить $y(x)$ по формуле Тейлора относительно точки x_i , то в точках x_{i+1} и x_{i-1} получим

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_1), \quad x_i < \xi_1 < x_{i+1};$$

$$y_{i-1} = y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i - \frac{h^3}{6} y'''(\xi_2), \quad x_{i-1} < \xi_2 < x_i.$$

Отсюда

$$y'_{i+} = (y_{i+1} - y_i) / h + O(h); \quad (2.1)$$

$$y'_{i-} = (y_i - y_{i-1}) / h + O(h); \quad (2.2)$$

$$y'_{i0} = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2h + O(h^2), \quad (2.3)$$

т.е. правая и левая разностные производные имеют аппроксимацию первого порядка точности, а центральная производная - аппроксимацию второго порядка.

Если взять еще один член разложения в формуле Тейлора функции $y(x)$, то можно получить разностную аппроксимацию второй производной, имеющую второй порядок точности:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \quad (2.4)$$

Перейдем теперь к простейшему численному методу решения задачи Коши для ОДУ I-го порядка:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.5)$$

Предположим, что нам известно решение задачи (2.5) в точке x_i , и заменим левую часть уравнения правой разностной производной в точке x_i :

$$(y_{i+1} - y_i) / h = f(x_i, y_i). \quad (2.6)$$

После элементарных преобразований

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.7)$$

Зная значение функции y в точке x_0 , можно последовательно определить значения $y(x)$ во всех остальных узлах сетки.

Описанный метод носит название явного метода Эйлера.

Геометрическая интерпретация метода приведена на рис. 2.1.

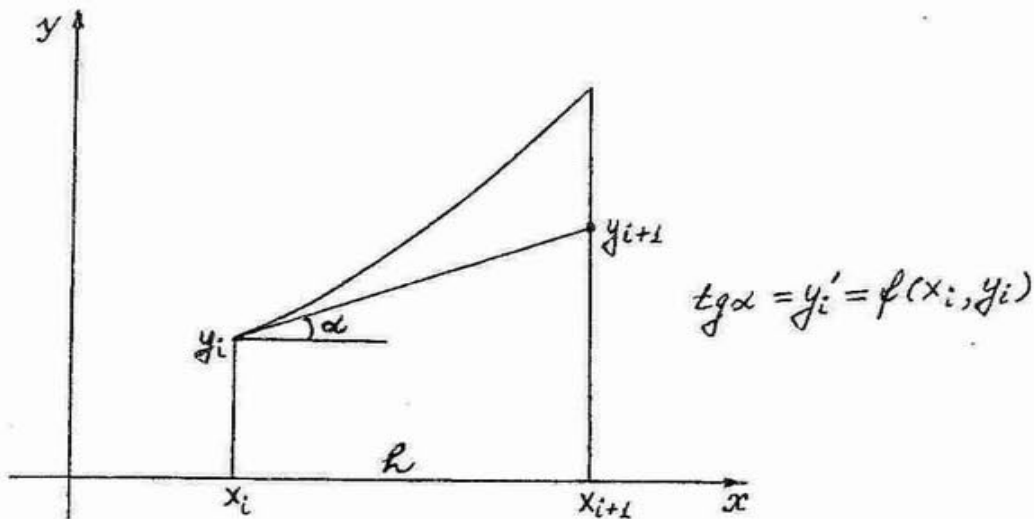


Рис. 2.1

Необходимо обратить внимание на то, что после перехода от формулы (2.6) к формуле (2.7) неприятности, связанные с ростом вычислительной погрешности при $h \rightarrow 0$, существенно уменьшаются.

Аппроксимация производной в методе Эйлера имеет первый порядок точности /см. формулу (2.1)/. Можно показать [I], что сам метод Эйлера также имеет первый порядок точности, т.е. норма разности между точным и приближенным решениями равна $O(h)$. При достаточно общих предположениях порядок точности разностного метода совпадает с порядком разностной аппроксимации уравнения [I].

Рассмотрим теперь решение краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка.

Дано уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b. \quad (2.8)$$

Задача (2.8) носит название краевой задачи в отличие от задачи Коши, в которой значения функции и производной заданы в одной точке. Краевая задача может иметь более общий вид:

$$y(a) + \alpha y'(a) = s_1; \quad y(b) + \beta y'(b) = s_2.$$

Но мы для определенности рассмотрим задачу (2.8).

Остановимся на двух распространенных методах решения краевой задачи, основанных на применении разностной аппроксимации производных.

I. Метод прогонки. Введем равномерную сетку на отрезке $[a, b]$ и заменим производные в задаче (2.8) их разностными аналогами (2.3) и (2.4) во всех внутренних точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$):

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,$$

где p_i , q_i и f_i - значения функций в точках x_i .

После несложных преобразований

$$y_{i-1} \left(1 - p_i \frac{h}{2}\right) + y_i \left(-2 + q_i h^2\right) + y_{i+1} \left(1 + p_i \frac{h}{2}\right) = h^2 f_i.$$

Величины y_0 и y_n в первом и последнем уравнениях известны, их можно перенести в правую часть. В результате приходим к СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно величин y_1, y_2, \dots, y_{n-1} :

$$y_1(-2 + h^2 q_1) + y_2(1 + p_1 \frac{h}{2}) = h^2 f_1 - (1 - p_1 \frac{h}{2}) y_0;$$

$$y_{i-1}(1 - p_i \frac{h}{2}) + y_i(-2 + h^2 q_i) + y_{i+1}(1 + p_i \frac{h}{2}) = h^2 f_i;$$

$$i = 2, 3, \dots, n-2;$$

$$y_{n-2}(1 - p_{n-1} \frac{h}{2}) + y_{n-1}(-2 + h^2 q_{n-1}) = h^2 f_{n-1} - (1 + p_{n-1} \frac{h}{2}) y_n.$$

Полученная система решается методом прогонки, рассмотренным в [2].

2. Метод стрельбы. Из курса дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейного ДУ 2-го порядка имеет вид

$$y_{OH} = C_1 y^1 + C_2 y^2 + y^0,$$

где y^0 - частное решение неоднородного уравнения (2.8);

y^1 и y^2 - линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения; C_1 и C_2 - произвольные постоянные, определяемые из начальных или краевых условий.

Если частные решения y^1, y^2 и y^0 удовлетворяют условиям $y^1(x_0) = 0, y^2(x_0) \neq 0, y^0(x_0) = y_a$, то из краевого условия в точке

$$C_1 \cdot 0 + C_2 y^2(x_0) + y_a = y_a$$

следует, что $C_2 = 0$. Константа C_1 определяется из условия в точке x_n :

$$C_1 y^1(x_n) + y_0(x_n) = y_b.$$

Используя приведенные выше рассуждения, выведем алгоритм метода стрельбы. Заменяем однородное дифференциальное уравнение (2.8) разностным аналогом и зададим условия в точках x_0, x_1 : $y_0^1 = 0, y_0^0 = y_a$, где y_1^1 и y_1^0 - произвольны;

$$\frac{y_{i-1}^1 - 2y_i^1 + y_{i+1}^1}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1}^1 - y_{i-1}^1}{2h} + q_i y_i^1 = 0; \quad y_0^1 = 0;$$

$$y_1^1 = A \neq 0;$$

$$\frac{y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1}^0 - y_{i-1}^0}{2h} + q_i y_i^0 = f_i; \quad y_0^0 = y_a; \quad y_1^0 = B.$$

Отсюда

$$y_{i+1}^1 = \left[(2 - h^2 q_i) y_i^1 - \left(1 - \frac{p_i h}{2}\right) y_{i-1}^1 \right] / \left(1 + \frac{p_i h}{2}\right);$$

$$y_0^1 = 0; \quad y_1^1 = A \neq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$y_{i+1}^0 = \left[(2 - h^2 q_i) y_i^0 - \left(1 - \frac{p_i h}{2}\right) y_{i-1}^0 \right] / \left(1 + \frac{p_i h}{2}\right) + h^2 f_i;$$

$$y_0^0 = y_a; \quad y_1^0 = B; \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

После нахождения величин y_n^1 и y_n^0 , определим C_1 :

$$C_1 = (y_b - y_n^0) / y_n^1.$$

Теперь можно вычислить все значения решения задачи (2.8) во внутренних узлах сетки:

$$y_i = C_1 y_0^1 + y_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Замечание. Для уменьшения вычислительной погрешности величины A и B следует выбирать равными $A = 0(h)$, $B = y_a + 0(h)$.
Пример: $A = h$, $B = y_a + h$.

Вернемся к задаче (2.5).

Существенным недостатком метода Эйлера является невысокий порядок точности. Повышение точности можно реализовать с помощью схемы "предиктор - корректор", т.е. вначале вычислить решение с небольшой точностью, а затем провести его уточнение. Одним из наиболее ярких примеров такого подхода являются методы Рунге - Кутты. Рассмотрим подробнее один из них, а именно

метод Рунге - Кутта второго порядка.

Итак, решается задача Коши для ОДУ i -го порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.9)$$

Задача (2.9) решается на сетке x_0, x_1, \dots, x_n , т.е. требуется найти решение во всех узлах сетки.

Предположим, что решение в точке x_i имеется, будем искать его в точке x_{i+1} следующим образом:

1. Вычислим предварительно величину

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i).$$

Очевидно, что \tilde{y}_{i+1} - значение решения в точке x_{i+1} , найденное по методу Эйлера. Геометрическая интерпретация этого шага заключается в том, что мы заменяем интегральную кривую касательной в точке (x_i, y_i) (рис. 2.2).

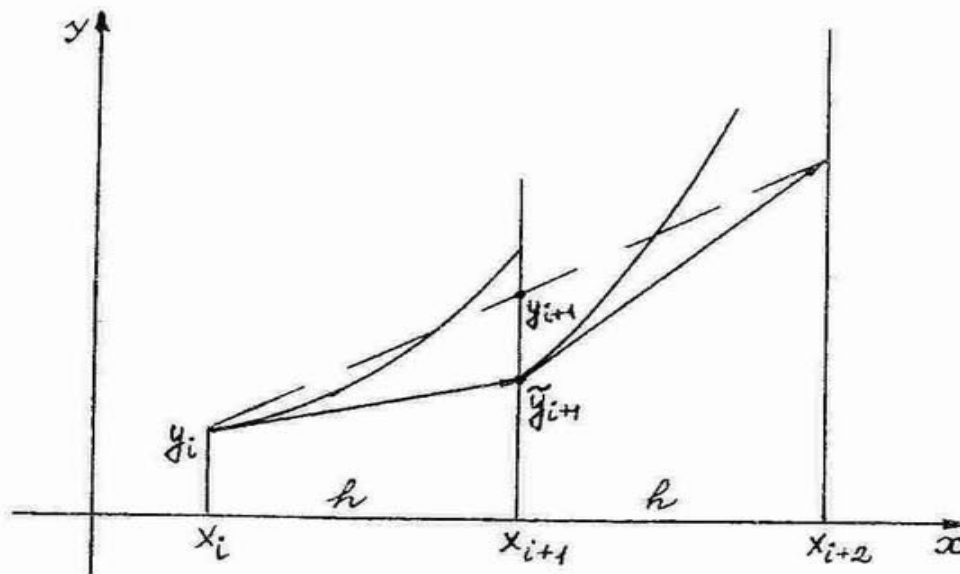


Рис. 2.2

2. Определим окончательно решение в точке x_{i+1} по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \tilde{y}_{i+1})).$$

Отсюда следует, что окончательное решение в точке x_{i+1} ищется в виде полусуммы векторов, построенных на касательных к ин-

тегральным кривым в точках (x_i, y_i) и $(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ (см. рис. 2.2). Полученная точка расположена существенно ближе к точному решению.

Алгоритм решения.

1. Последовательно вычисляем

$$K_1 = h f(x_i, y_i) \text{ и } K_2 = h f(x_i + h, y_i + K_1).$$

2. Находим решение по формуле

$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + K_2) / 2.$$

Можно показать [I], что рассмотренный метод имеет 2-й порядок точности, т.е.

$$|y_{i+1} - y(x_{i+1})| = O(h^2).$$

Замечание. Существуют и другие схемы Рунге - Кутта второго порядка точности. Все они требуют двух обращений к правой части уравнения (2.9).

Усложняя рассмотренную схему, можно и дальше повышать порядок точности. Приведем здесь метод Рунге - Кутта 4-го порядка, получившего наибольшее распространение.

Алгоритм решения.

1. Последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} K_1 &= h f(x_i, y_i); \\ K_2 &= h f(x_i + h/2, y_i + K_1/2); \\ K_3 &= h f(x_i + h/2, y_i + K_2/2); \\ K_4 &= h f(x_i + h, y_i + K_3). \end{aligned} \tag{2.10}$$

2. Находим решение в точке x_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6. \tag{2.11}$$

Данная схема имеет 4-й порядок точности и требует четырех обращений к правой части.

Замечание. Явный метод Эйлера можно рассматривать как метод Рунге - Кутта 1-го порядка.

При нахождении решения с заданной точностью обычно пользуются правилом Рунге, подробно описанным в [7]. Вычисляют вначале y_{i+1} по значению y_i с шагом $h = x_{i+1} - x_i$. Затем величину y_{i+1} определяют с шагом $h/2$, т.е. за 2 шага. Полученные значения сравнивают. Если абсолютная величина разности, деленная на 15 (для метода 4-го порядка), не превосходит ε , то вычисления заканчивают. В противном случае шаг опять делится пополам, решение определяется за 4 шага, сравнивается с предыдущим и т.д. Если шаг сетки h велик, то решение в точке x_{i+1} можно вначале получить с шагом $\tilde{h} \approx \sqrt[4]{\varepsilon}$, т.е. за $\lceil (x_{i+1} - x_i) / \sqrt[4]{\varepsilon} \rceil$ шагов, затем число шагов удваивать до тех пор, пока не будет выполнено условие Рунге.

Формулы, аналогичные формулам (2.IO), (2.II), имеют место при решении задачи Коши для систем ОДУ I-го порядка. Продемонстрируем их на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями:

$$y' = f_1(x, y, z); \quad y(\alpha) = y_\alpha; \quad (\text{ж})$$

$$z' = f_2(x, y, z); \quad z(\alpha) = z_\alpha.$$

Введем обозначение $\vec{s} = (x, y, z)$.

Алгоритм вычисления y_{i+1} и z_{i+1} по значениям y_i и z_i :

- I) $\vec{s}_1 = (x_i, y_i, z_i); K_1 = h f_1(\vec{s}_1); l_1 = h f_2(\vec{s}_1);$
 $\vec{s}_2 = (x_i + h/2, y_i + K_1/2, z_i + l_1/2); K_2 = h f_1(\vec{s}_2);$
 $l_2 = h f_2(\vec{s}_2);$
 $\vec{s}_3 = (x_i + h/2, y_i + K_2/2, z_i + l_2/2); K_3 = h f_1(\vec{s}_3);$
 $l_3 = h f_2(\vec{s}_3);$
 $\vec{s}_4 = (x_i + h, y_i + K_3, z_i + l_3); K_4 = h f_1(\vec{s}_4);$
 $l_4 = h f_2(\vec{s}_4);$
- 2) $y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6;$
 $z_{i+1} = z_i + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) / 6.$

Проверка на точность осуществляется по правилу Рунге по всем известным функциям.

Уравнения старших порядков предварительно преобразуются в систему ДУ I-го порядка. Напомним этот алгоритм на примере уравнения 2-го порядка.

Пусть

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(a) = y_a, \quad y'(a) = y'_a. \quad (2.12)$$

Введем функцию $z: z(x) = y'(x)$.

Отсюда $y''(x) = z'(x)$.

Уравнение (2.12) переходит в систему двух уравнений I-го порядка:

$$y' = z; \quad y(a) = y_a;$$

$$z' = f(x, y, z); \quad z(a) = y'_a.$$

В наших обозначениях /см. (*)/ $f_1(x, y, z) = z$, $f_2(x, y, z) = f(x, y, z)$.

Очевидно, что метод Рунге - Кутты любого порядка является явным одношаговым методом.

При отыскании решения уравнения (2.9) в точке x_{i+1} мы пользовались только решением в предыдущей точке x_i . Можно попытаться повысить точность метода, если использовать имеющуюся информацию в нескольких или во всех предыдущих точках. Такие методы носят название многошаговых.

Мы рассмотрим здесь один из классических многошаговых методов - метод Адамса.

Суть метода заключается в том, что правая часть уравнения $y' = f(x, y(x))$ заменяется интерполяционным многочленом степени k : $f(x, y(x)) \approx P_k(x)$. Для получения расчетных формул проинтегрируем это уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, заменив при этом правую часть интерполяционным многочленом:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(x) dx.$$

Отсюда

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(x) dx. \quad (2.13)$$

В качестве узлов интерполяции выберем точки $x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_i$. При $k=0$ $f(x, y(x)) \approx f(x_i, y_i)$ и

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx = y_i + h f(x_i, y_i),$$

что соответствует явному методу Эйлера.

При $k=1$

$$f(x, y(x)) \approx P_1(x) = \frac{x_i - x}{h} f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} f_i; (f_j = f(x_j, y(x_j))).$$

Интегрируя данный полином, получим

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}) - \quad (2.14)$$

двухшаговый метод Адамса.

Можно показать [I], что метод имеет 2-й порядок точности.

Заменяв $f(x, y(x))$ параболой по узлам (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) , получим трехшаговый метод Адамса и т.д.

Расчетные формулы для трехшагового и четырехшагового методов Адамса, имеющих соответственно третий и четвертый порядок точности, будут выглядеть так:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (5f_{i-2} - 16f_{i-1} + 23f_i) -$$

для трехшагового метода;

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i) -$$

для четырехшагового метода.

Многошаговые методы требуют в начале работы знания решения в $(k+1)$ -й предыдущих точках. Так, для использования формулы (2.14) нужны величины y_0 и y_1 , для трехшагового метода — y_0, y_1 и y_2 и т.д. Чтобы получить эти значения, обычно при-

меняют какой-либо одношаговый метод (например, Рунге - Кутта) того же порядка точности.

Рассмотренные формулы носят название явных методов Адамса. Значение y_{i+1} определяют непосредственно по нескольким предыдущим.

Интерполяционный многочлен $P_k(x)$ можно строить по узлам $x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, \dots, x_i, x_{i+1}$. Так, для двухшагового метода Адамса многочлен $P_1(x)$ будет иметь вид

$$P_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h} f_i + \frac{x - x_i}{h} f_{i+1},$$

а соответствующее значение y_{i+1} определяется из соотношения

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}).$$

Таким образом, нахождение значения y_{i+1} требует решения уравнения

$$y_{i+1} - \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i),$$

которое можно проводить любым из методов (например, рассмотренных в [1, 2]).

Методы, с помощью которых необходимо решать уравнения относительно y_{i+1} , носят название неявных.

Наряду с очевидным недостатком (усложнение алгоритма) неявные методы имеют одно существенное преимущество. Рассмотрим это на следующем примере. При $k=0$ $P_0(x) = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ и

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (2.15)$$

Формула (2.15) носит название неявного метода Эйлера. Ее легко получить, если в исходном уравнении заменить производную на левую разностную /см. (2.2)/.

Применим теперь явный и неявный методы Эйлера к задаче Коши

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0; \quad x \geq 0, \quad \lambda < 0.$$

Ее решение $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ удовлетворяет условию

$|y(x+h)| < |y(x)|$ (модуль решения монотонно убывает).

При использовании явной схемы /см. (2.1)/

$$y_{i+1} = y_i + h \lambda y_i \quad \text{или} \quad y_{i+1} = (1 + \lambda h) y_i.$$

Условие убывания выполняется тогда и только тогда, когда $|1 + \lambda h| < 1$, что эквивалентно ограничению на шаг h :

$$0 < h < \frac{2}{|\lambda|}.$$

Пример: $y' = -100 y$, $\lambda = -100$, $0 < h < 0,02$.

Методы, в которых существуют ограничения на шаг сетки, носят название условно устойчивых.

Применим теперь к решению того же уравнения неявную схему (2.15):

$$y_{i+1} = y_i + h \lambda y_{i+1} \quad \text{и} \quad y_{i+1} = y_i / (1 - h \lambda).$$

Нетрудно увидеть, что характерное условие убывания выполняется при любых значениях $h > 0$. Такие схемы называют абсолютно устойчивыми. Итак, явные многошаговые схемы являются условно устойчивыми, а неявные — абсолютно устойчивыми [I]. Использование условно устойчивых методов без предварительного анализа в ряде случаев приводит к недопустимо большой вычислительной погрешности.

§ 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Одномерная оптимизация. Многомерная оптимизация. Методы покоординатного и наискорейшего спуска. Методы сопряженных градиентов и проекции градиента

К минимизации функций сводятся многие задачи управления отраслями промышленности, сельского хозяйства, транспорта, распределения ресурсов и других областей жизни общества.

Решение задач оптимизации складывается из следующих элементов:

- 1) создание математической модели явления;
- 2) определение целевой функции и важнейших параметров, подлежащих оптимизации;

3) непосредственная минимизация некоторой функции обычно большого числа переменных;

4) внедрение результатов исследования.

Рассмотрим одномерную оптимизацию.

Определение. Функция $F(x)$ называется униmodalной на отрезке $[a, b]$ если она имеет на этом отрезке единственный экстремум.

Будем считать, что это минимум, в противном случае рассмотрим $-F(x)$.

Пусть $F^* = \min_{[a, b]} F(x) = F(x^*)$.

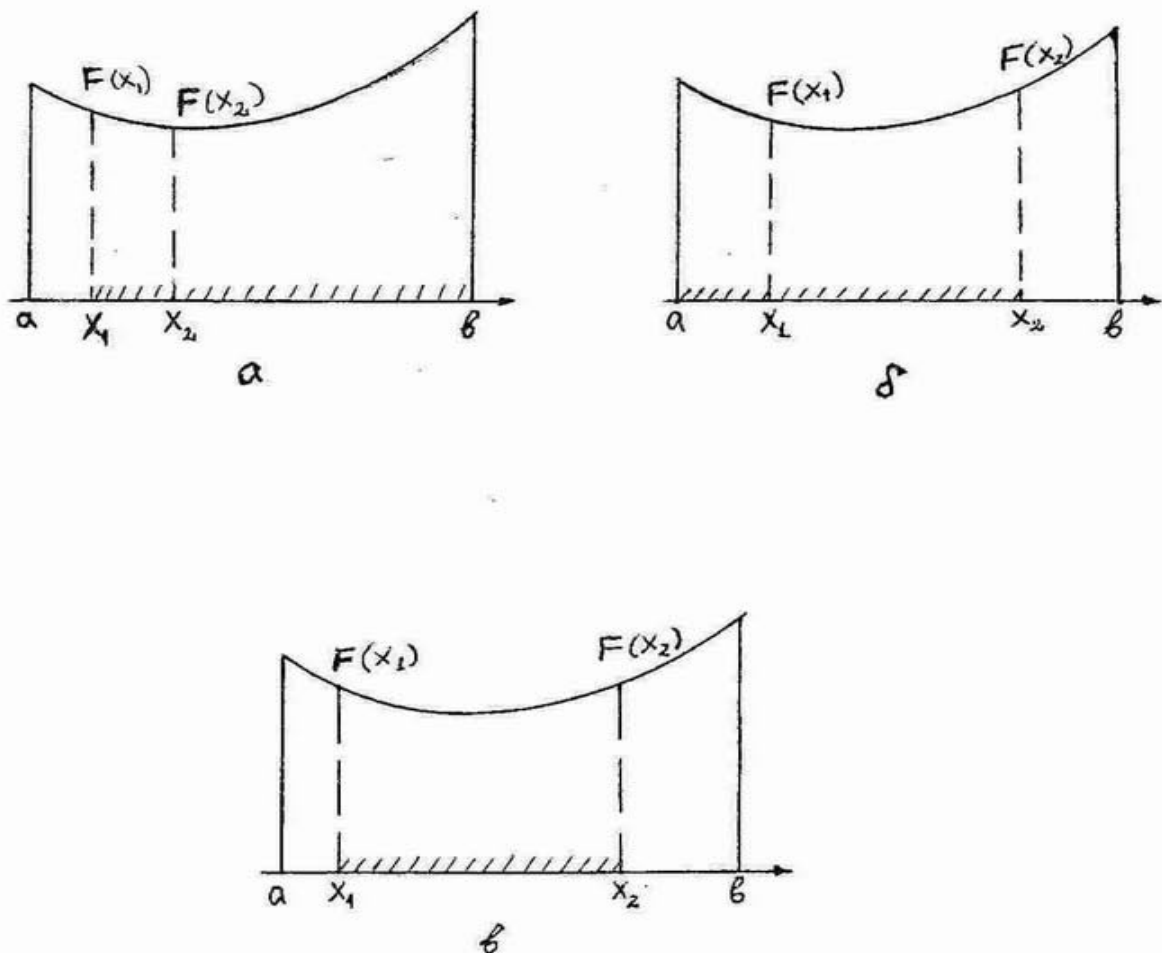


Рис. 3.1

Утверждение. Если функция унимодальна на некотором интервале, то по значениям любой пары $F(x_1)$ и $F(x_2)$ можно указать интервал, в котором заключен минимум x^* (интервал неопределенности), причем этот интервал меньше, чем первоначальный (рис. 3.1):

- а) если $F(x_1) > F(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$;
- б) если $F(x_1) < F(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$;
- в) если $F(x_1) = F(x_2)$, то $x^* \in [x_1, x_2]$.

Пользуясь утверждением, перейдем теперь к конкретным методам одномерной оптимизации.

Метод дихотомии (половинного деления). В условиях, когда на k -м шаге проводятся два опыта, аргументы $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ должны выбираться на расстоянии $\delta/2$ справа и слева от середины интервала:

$$x_{1,k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\delta}{2}; \quad x_{2,k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\delta}{2},$$

где a_k, b_k — границы интервала неопределенности;

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

(рис. 3.2).

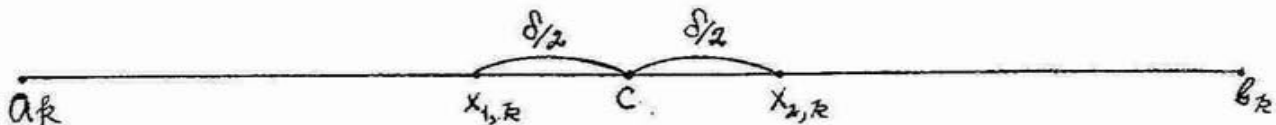


Рис. 3.2

Если $F(x_{1,k}) > F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = x_{1,k}$, $b_{k+1} = b_k$;

если $F(x_{1,k}) < F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{2,k}$;

если $F(x_{1,k}) = F(x_{2,k})$, то $a_{k+1} = x_{1,k}$, $b_{k+1} = x_{2,k}$.

$$\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l-l'}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{l'}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$$

Число $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ называется золотым сечением.

В методе золотого сечения делим интервал неопределенности на три части (рис. 3.4). Точки $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ осуществляют золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$:

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= a_k + (1-\varphi)(b_k - a_k); \\ x_{2,k} &= b_k - (1-\varphi)(b_k - a_k). \end{aligned}$$



Рис. 3.4

Можно показать, что точки $x_{1,k}$ и $x_{2,k}$ являются золотым сечением отрезков $[a_k, x_{2,k}]$ и $[a_k, b_k]$ соответственно, и, следовательно, одна из двух точек $x_{1,k}$ или $x_{2,k}$ используется и на следующем шаге, что уменьшает количество вычислений.

Пример. Пусть $F(x) = (x-1)^2$. Не смущаясь очевидностью результата, будем сужать интервал неопределенности:

$$a_1 = 0; \quad b_1 = 3;$$

$$x_{1,1} = 0 + 0,38(3-0) = 1,14; \quad x_{2,1} = 3 - 0,38(3-0) = 1,86;$$

$$F(x_{1,1}) = 0,14^2 = 0,0196; \quad F(x_{2,1}) = 0,86^2 > F(x_{1,1});$$

$$a_2 = a_1 = 0; \quad b_2 = x_{2,1} = 1,86;$$

$$x_{1,2} = a_2 + 0,38(1,86-0) = 0,7128; \quad x_{2,2} = x_{1,1} = 1,14;$$

$$F(x_{1,2}) = 0,29^2 > F(x_{2,2}).$$

Следовательно, $a_3 = x_{1,2} = 0,7128$; $b_3 = b_2 = 1,86$ и т.д.

Многомерная оптимизация. Требуется найти

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для простоты рассуждений далее будем рассматривать функцию $F(x, y)$ двух переменных.

Метод покоординатного спуска. Выберем начальное приближение (x_0, y_0) (рис. 3.5). Фиксируем значение координаты $y = y_0$, тогда $F(x, y)$ будет зависеть только от переменной x , обозначим ее $\varphi_1(x) = F(x, y_0)$.

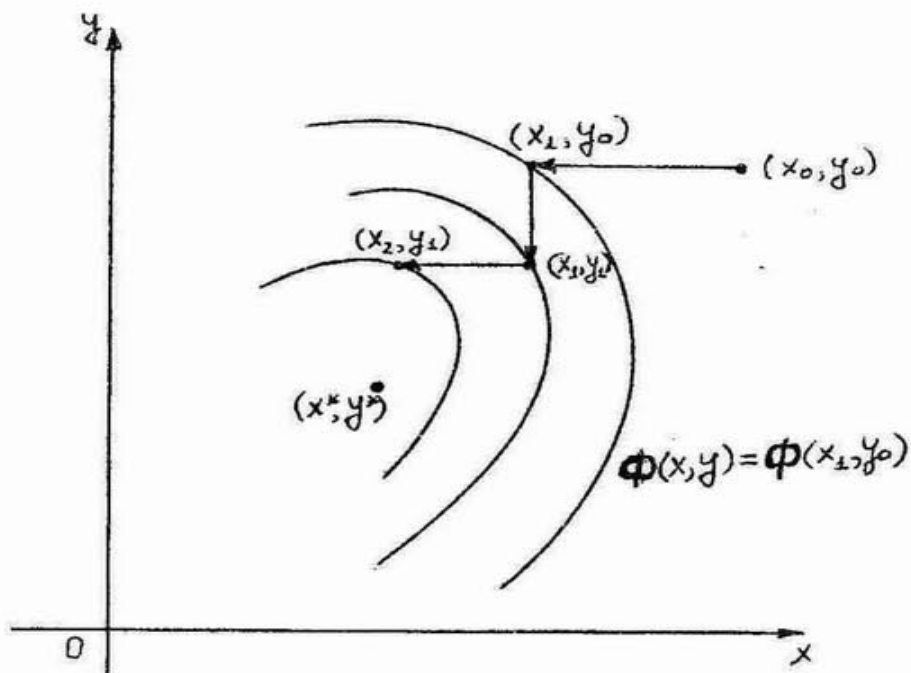


Рис. 3.5

Используя описанные выше методы одномерной оптимизации, найдем минимум функции одной переменной $\varphi_1(x)$ и обозначим его x_1 . Мы сделали шаг из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_0) по направлению, параллельному оси Ox , на этом шаге значение функции уменьшилось. Затем из новой точки делаем спуск по направлению, параллельному оси Oy , т.е. рассмотрим функцию

$\varphi_2(y) = \Phi(x_1, y)$, найдем ее минимум и обозначим его y_1 .

Приход в точку (x_1, y_1) завершает цикл спусков. Будем повторять циклы.

Утверждение. Если функция $\Phi(x, y)$ гладкая, то в некоторой окрестности минимума процесс спуска по координатам сходится к этому минимуму.

Пример. Пусть $F(x, y) = 4(x, y)^2 + (x - y)^2 = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ (рис. 3.6);

$$x_0 = 1; y_0 = 1;$$

$$\varphi_1(x) = 5x^2 + 6x + 5; \quad \varphi_1'(x_0) = 10x_1 + 6 = 0; \quad x_1 = -0,6;$$

$$\varphi_1(y) = x_1^2 + 6(x_1)y + 5y^2;$$

$$\varphi_1'(y_1) = 10y_1 + 6x_1 = 0; \quad y_1 = -0,6x_1 = 0,36$$

и т.д.

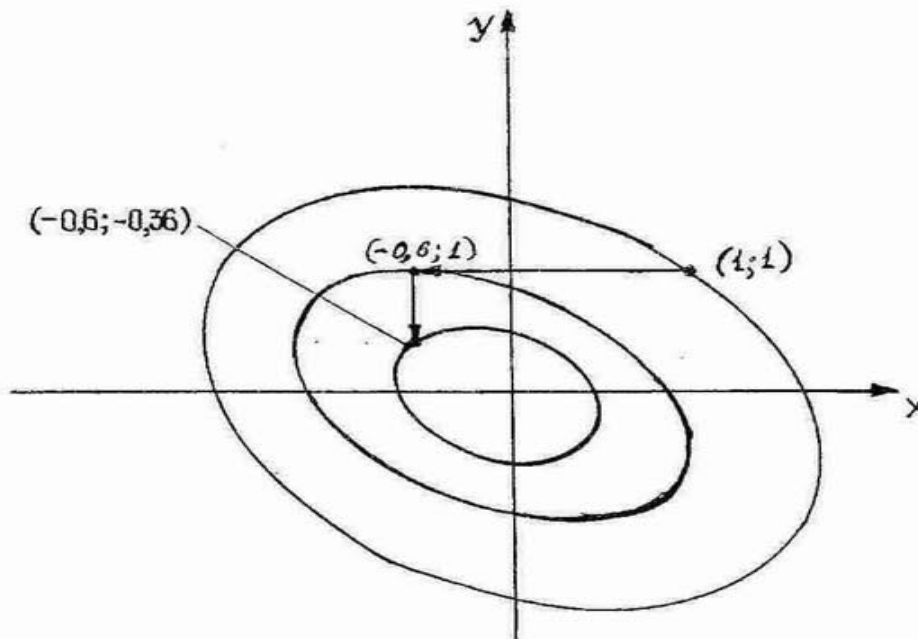


Рис. 3.6

Метод наискорейшего (градиентного) спуска. В этом методе следующее приближение отыскивается в виде

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \delta_n \text{grad } F(\vec{x}^n).$$

Значение δ_n определяется из условия

$$\min_{\delta_n} F(\vec{x}^n - \delta_n \text{grad } F(\vec{x}^n)),$$

т.е. алгоритм состоит в последовательной минимизации функции одной переменной δ_n .

Пример. Пусть $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ (рис. 3.7);

$$x_1^0 = 2; \quad x_2^0 = 1;$$

$$\text{grad } F(x_1, x_2) = (2x_1, 8x_2);$$

$$\text{grad } F(2, 1) = (4, 8);$$

$$\vec{x}^1(\delta_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \delta_0 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 4\delta_0 \\ 1 - 8\delta_0 \end{bmatrix}.$$

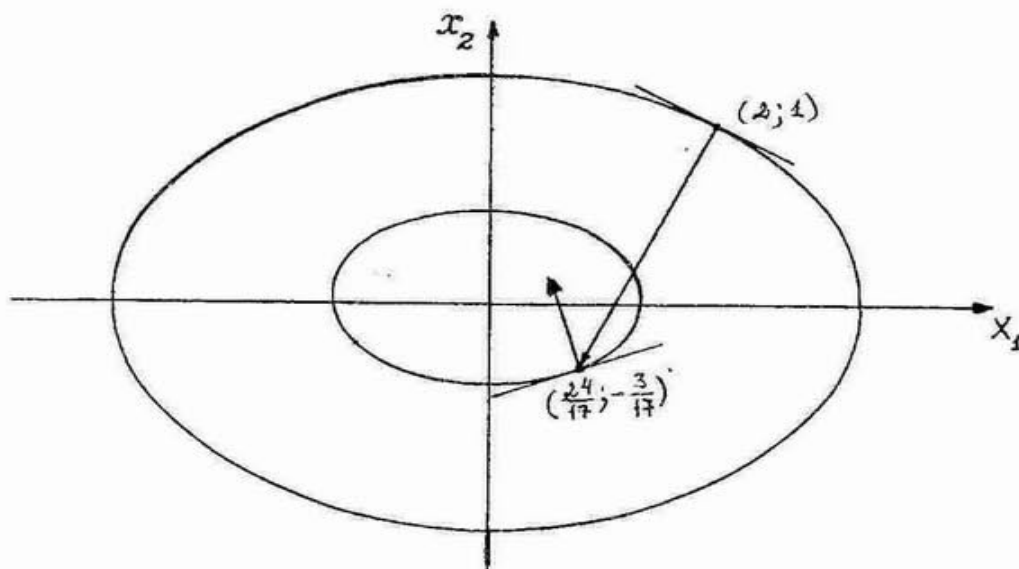


Рис. 3.7

Найдем $\min_{\delta} \varphi(\delta)$,

где

$$\varphi(\delta_0) = (2 - 4\delta_0)^2 + 4(1 - 8\delta_0)^2;$$

$$\varphi'(\delta_0) = 2(2 - 4\delta_0)(-4) + 8(1 - 8\delta_0)(-8) = 0,$$

$$\delta_0 = \frac{5}{34}.$$

Отсюда

$$x_1^1 = \frac{24}{17}; \quad x_2^1 = -\frac{3}{17}$$

и т.д.

Метод сопряженных градиентов. До сих пор в итерационной процедуре в качестве направления убывания функции $F(\vec{x})$ мы использовали направление антиградиента: $\vec{p}^k = -\text{grad } F(\vec{x}^k)$. Однако такой выбор направления не всегда бывает удачным. В частности, для плохо обусловленных задач минимизации направление антиградиента в точке \vec{x}^k может значительно отличаться от направления к точке минимума \vec{x}^* . В результате траектория приближения к точке минимума будет иметь зигзагообразный характер (см. рис. 3.7). Метод сопряженных градиентов лишен этого недостатка.

Определение. Ненулевые векторы $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \dots, \vec{p}^k$ называются сопряженными относительно матрицы A размеров $(n \times n)$, или A -ортогональными, если

$$(A\vec{p}^i, \vec{p}^j) = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (3.1)$$

Рассмотрим минимизацию в R^n квадратичной функции $F(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c$ с положительно-определенной матрицей A с помощью итерационного процесса

$$\begin{aligned} \vec{x}^{k+1} &= \vec{x}^k + \alpha_k \vec{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \vec{x}^0 \in R^n; \\ \vec{p}^0 &= -\overline{\text{grad}} F(\vec{x}^0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где векторы \vec{p}^k A -ортогональны, а величина шага α_k определяется из условия исчерпывающего спуска по направлению \vec{p}^k .

После вычисления очередной точки \vec{x}^{k+1} , $k=0,1,\dots$, новое направление поиска \vec{p}^{k+1} находят по формуле

$$\vec{p}^{k+1} = -\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k) + \beta_k \vec{p}^k, \quad k=0,1,\dots, \quad (3.3)$$

где коэффициенты β_k выбирают так, чтобы при минимизации квадратичной функции $F(\vec{x})$ с положительно-определенной матрицей A получилась последовательность A -ортогональных векторов $\vec{p}^0, \vec{p}^1, \dots$.

Из условия $(A\vec{p}^{k+1}, \vec{p}^k) = 0$ имеем

$$\beta_k = \frac{A(\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}), \vec{p}^k)}{(A\vec{p}^k, \vec{p}^k)}. \quad (3.4)$$

Для квадратичной функции шаг исчерпывающего спуска по направлению \vec{p}^k равен

$$\alpha_k = -\frac{(\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k), \vec{p}^k)}{(A\vec{p}^k, \vec{p}^k)}. \quad (3.5)$$

Можно показать, что описанный процесс минимизации /см. (3.2) - (3.5)/ квадратичной функции с положительно-определенной симметричной матрицей A дает точки $\vec{x}^0, \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k$ и векторы $\vec{p}^0, \dots, \vec{p}^k$, такие, что если $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^i) \neq 0$ при $0 \leq i < k \leq n-1$, то векторы $\vec{p}^0, \dots, \vec{p}^k$ A -ортогональны, а градиенты $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0), \dots, \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^i)$ взаимно ортогональны.

Обращение градиента в нуль в очередной точке \vec{x}^k итерационного процесса свидетельствует о достижении точки глобального минимума. Рассматриваемый метод гарантирует нахождение точки

минимума квадратичной функции не более чем за n шагов.

С учетом взаимной ортогональности градиентов $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^i)$ и условий исчерпывающего спуска по направлениям \vec{p}^k можно упростить выражения (3.4) и (3.5). Запишем числитель дроби (3.5) в виде

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k), \vec{p}^k) &= (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k), \\ &- \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k) + \beta_{k-1} \vec{p}^{k-1}) = \\ &= -\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|^2 + \beta_{k-1} (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k), \vec{p}^{k-1}) = \\ &= -\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Умножив обе части равенства (3.2) слева на матрицу A и прибавив к ним по вектору \vec{b} , получим

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}) = \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k) + \alpha_k A \vec{p}^k. \quad (3.7)$$

С учетом формулы (3.7) упростим числитель в выражении (3.4) для β_k следующим образом:

$$\begin{aligned} (A \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}), \vec{p}^k) &= (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}), A \vec{p}^k) = \\ &= (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}), (\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}) - \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})/\alpha_k) = \\ &= \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})\|^2}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\alpha_k = \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|^2}{(A \vec{p}^k, \vec{p}^k)}, \quad (3.8)$$

$$\beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})\|^2}{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|^2}. \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) для коэффициента β_k не содержит в явном виде матрицу A квадратичной функции. Поэтому метод сопряженных градиентов может применяться и для минимизации неквадратичных функций. В этом случае итерационный процесс метода описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{x}^{k+1} &= \vec{x}^k + \alpha_k \vec{p}^k, \quad \vec{x}^0 \in R^n, \\ \vec{p}^k &= -\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} F(\vec{x}^k + \alpha_k \vec{p}^k) &= \min_{\alpha > 0} F(\vec{x}^k + \alpha \vec{p}^k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^{k+1} &= -\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}) + \beta_k \vec{p}^k, \\ k &= 0, 1, \dots; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})\|}{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Разумеется, процесс (3.10) – (3.13) может не приводить к точке минимума функции $F(\vec{x})$, отличной от квадратичной, за конечное число итераций. Точное определение α_k из условия (3.11) возможно лишь в редких случаях. Поэтому реализация каждой итерации будет сопровождаться неизбежными погрешностями. Эти погрешности, накапливаясь, могут привести к тому, что векторы \vec{p}^k перестанут указывать направление убывания функции, и сходимость метода может нарушиться. Поэтому на практике в методе сопряженных градиентов через N шагов производят обновление метода, полагая $\beta_{mN} = 0$, $m = 1, 2, \dots$. Номера mN называют моментами обновления метода (рестарта). Часто полагают $N = n$, где n – размерность пространства R^n . Если $N = 1$, то получится частный случай метода сопряженных градиентов – метод наискорейшего спуска.

Опишем алгоритм метода сопряженных градиентов.

Шаг 0. Задать параметр точности $\varepsilon > 0$, выбрать $\vec{x}^0 \in R^n$, найти $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0)$.

Шаг 1. Положить $k=0$, $\vec{p}^0 = -\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0)$.

Шаг 2. Решить задачу одномерной минимизации

$$F(\vec{x}^k + \alpha \vec{p}^k) \rightarrow \min, \alpha > 0, \text{ т.е. найти } \alpha = \alpha_k.$$

Шаг 3. Положить $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \alpha_k \vec{p}^k$ и вычислить $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})$. Проверить условие достижения точности $\|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})\| < \varepsilon$. Если оно выполняется, то положить

$\vec{x}^0 = \vec{x}^{k+1}$; $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0) = \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})$ и закончить поиск, иначе - перейти к шагу 4.

Шаг 4. Проверить условие $k+1=n$. Если оно выполняется, то положить $\vec{x}^0 = \vec{x}^{k+1}$, $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0) = \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})$ и перейти к шагу 1 (рестарт), иначе - перейти к шагу 5.

Шаг 5. Вычислить коэффициент $\beta_k = \|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1})\|^2 / \|\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k)\|^2$

и найти новое направление поиска $\vec{p}^{k+1} = -\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^{k+1}) + \beta_k \vec{p}^k$. Положить $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Замечание. Вблизи точки минимума дважды дифференцируемая функция с положительно-определенной матрицей Гессе $F''(\vec{x}^*)$, как правило, достаточно хорошо аппроксимируется квадратичной функцией. Поэтому можно надеяться на хороший результат применения этого метода для таких функций.

Пример. Методом сопряженных градиентов найти точку минимума функции $F(\vec{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ из начальной точки $\vec{x}^0 = (0,0)$.

Итерация I.

Шаг 0. Положим $\varepsilon = 0,01$, $\vec{x}^0 = (0,0)$, найдем $\overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^0) = (1,0)$.

Шаг 1. Положим $k=0$, $\vec{p}^0 = -\text{grad} F(\vec{x}^0) = (-1,0)$.

Шаг 2. Решим задачу одномерной минимизации $F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0) \rightarrow \min$.

Получим $\alpha_0 = 1/8$ (для нахождения α_0 можно было воспользоваться формулой $\alpha_k = -(A\vec{x}^k + \vec{b}, \vec{p}^k) / (A\vec{p}^k, \vec{p}^k)$).

Шаг 3. Найдем $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha_0 \vec{p}^0 = (-1/8, 0)$ и $\overline{\text{grad}} F(\vec{x}^1) = (0, 1/2)$.

Точность не достигнута, перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Проверить условие $k+1 = n$, если оно не выполняется, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Найдем коэффициент $\beta_0 = 1/4$ и новое направление

спуска $\vec{p}^1 = -\text{grad} F(\vec{x}^1) = \beta_0 \vec{p}^0 = (-1/4, -1/2)$.

Итерация 2.

Шаг 2. Решим задачу одномерной минимизации $F(\vec{x}^1 + \alpha \vec{p}^1) \rightarrow \min$.

Получим $\alpha_1 = 1/4$.

Шаг 3. Найдем $\vec{x}^2 = \vec{x}^1 + \alpha_1 \vec{p}^1 = (-3/16, -1/8)$

и $\overline{\text{grad}} F(\vec{x}^2) = (0, 0)$ — задача решена точно.

Метод проекции градиента. Пусть требуется найти

$$\min F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при условиях

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\psi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

или $\vec{\psi}(\vec{x}) = 0$.

Условный минимум целевой функции находится на поверхности ограничений $\vec{\psi}(\vec{x}) = 0$, поэтому алгоритм метода проекции градиента состоит из двух основных этапов.

Этап I. Возврат на поверхность ограничений из текущей точки поиска \vec{x}^k , если эта точка вышла за допустимые пределы нарушения ограничений $\Delta\psi$ (рис. 3.8): $\|\vec{\psi}(\vec{x}^k)\| \geq \Delta\psi$.

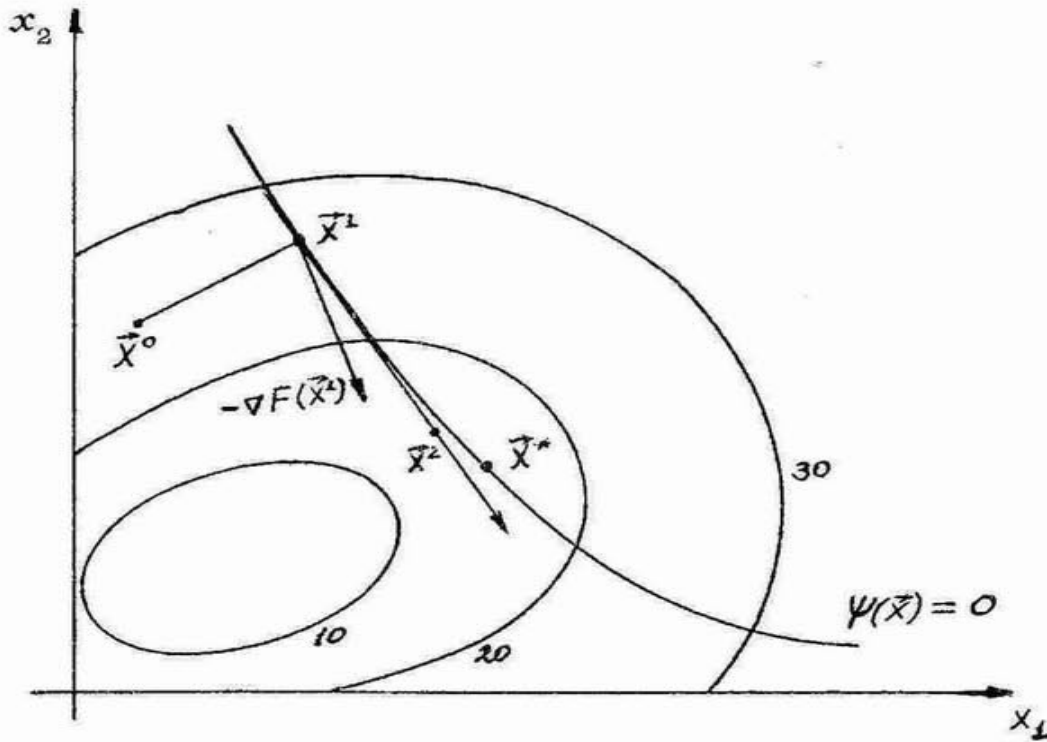


Рис. 3.8

Такое движение происходит из точки \vec{x}^k по нормали к поверхности ограничений (см. рис. 3.8) из точки \vec{x}^0 в точку \vec{x}^1 . Приращение зависит от величины отклонения и определяется по формуле

$$\Delta \vec{x}^{k+1} = -\Delta_k^T (\Delta_k \Delta_k^T)^{-1} \vec{\Psi}(\vec{x}^k),$$

где Δ_k - матрица размеров $(m \times n)$, строками которой являются градиенты функций-ограничений $\psi_j(\vec{x})$, вычисленные в точке \vec{x}^k :

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

где $\vec{\psi}(\vec{x}^k)$ - вектор-функция ограничений в точке \vec{x}^k .

Таким образом, на этапе 1

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \Delta \vec{x}^{k+1}.$$

После попадания в малую окрестность поверхности ограничений выполняется второй этап алгоритма.

Этап 2. Перемещение в сторону условного экстремума вдоль линеаризованной поверхности ограничений, т.е. вдоль многомерной плоскости, касательной в точке \vec{x}^k поверхности ограничений. Направление поиска минимума определяется по направлению проекции антиградиента целевой функции на эту плоскость:

$$\vec{s}^k = H_k \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k).$$

Здесь $H_k = I - \Delta_k^T (\Delta_k \Delta_k^T)^{-1} \Delta_k$ - проектирующая матрица, где I - единичная матрица порядка n . Тогда

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - h_k \vec{s}^k = \vec{x}^k - h_k H_k \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}^k),$$

где h_k - величина шага.

Если поверхность ограничений нелинейна, то перемещение вдоль гиперповерхности может привести к нарушению условий

$\|\vec{\psi}(\vec{x}^k)\| < \Delta \psi$. Тогда повторяется этап 1 и т.д.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $A: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ - линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве \mathcal{R}^2 , $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} -$$

матрица линейного оператора в ортонормированном базисе.

Найти $\|A\|$.

Решение. Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1. Напомним, что

$$\|A\| = \sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|A \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A \vec{x}\|.$$

Пусть $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\|\vec{x}\| = 1,$$

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + 3 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \|A \vec{x}\|^2 &= (2 \cos t + 3 \sin t)^2 + (3 \cos t + \sin t)^2 = \\ &= 11,5 + \frac{3}{2} \cos 2t + 9 \sin 2t = \varphi(t); \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = -3 \sin 2t + 18 \cos 2t = 0;$$

$$\operatorname{tg} 2t = 6; \quad t_0 = 0,702 \ 823 \ 824;$$

$$\|A \vec{x}^0\| = \sqrt{\varphi(t_0)} = 4,541 \ 381 \ 265.$$

Следовательно, $\|A\| = 4,541 \ 381 \ 265$.

Способ 2. Для симметрических линейных операторов

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \{|\lambda_i|\}.$$

где λ_i — собственные значения A .

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 9 = 0.$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}.$$

Следовательно, $\|A\| = \lambda_1 \approx 4,541 \ 381 \ 265$.

2. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$) — линейный оператор,

действующий в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n ($n=2,3$). Найти $\|A\|$, если матрица линейного оператора в ортонормированном базисе имеет вид

$$\text{а) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 17 & 77 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, действующий в нормированном пространстве \mathbb{R}^2 , $\vec{x} = (x_1, x_2)$,

$$\|\vec{x}\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} —$$

матрица линейного оператора в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Найти $\|\mathbf{A}\|_{\infty}$.

$$\text{Решение. } \|\mathbf{A}\vec{x}\|_{\infty} = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \{|(Ax)_1|, |(Ax)_2|\} =$$

$$= \max_{(x_1, x_2) \neq (0, 0)} \{|2x_1 + 3x_2|, |7x_1 - x_2|\};$$

$$|2x_1 + 3x_2| \leq 2|x_1| + 3|x_2| \leq 5 \max\{|x_1|, |x_2|\};$$

$$|7x_1 - x_2| \leq 7|x_1| + |x_2| \leq 8 \max\{|x_1|, |x_2|\};$$

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\|_{\infty} \leq 8 \max\{|x_1|, |x_2|\} = 8\|\vec{x}\|_{\infty};$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} \leq 8.$$

Пусть $\vec{x}^0 = (1, -1)$. Тогда $\|\vec{x}^0\|_{\infty} = 1$;

$$\|\mathbf{A}\vec{x}^0\| = \max\{1, 8\} = 8; \Rightarrow \|\mathbf{A}\| \geq 8.$$

$$\|\mathbf{A}\| = 8.$$

4. Найти $\|A\|_\infty$ (см. задачу 3) для операторов, задаваемых матрицами из задачи 2 (а, б, в, г, д).

5. Пусть $A: R^2 \rightarrow R^2$ - линейный оператор, действующий в нормированном пространстве R^2 , $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -10 \end{pmatrix} -$$

матрица линейного оператора в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Найти $\|A\|_1$.

6. Решить систему уравнений методом прогонки:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти вещественный корень уравнения с точностью 0,01, пользуясь принципом сжимающих отображений:

$$x^3 - 7x + 1 = 0.$$

8. Решить системы линейных уравнений, построив сжимающее отображение:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

9. Построить кубический сплайн, проходящий через указанные точки:

а) $(-1, 1), (0, -1), (1, 1), (2, 4)$;

б) $(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$;

в) $(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)$.

10. Найти наилучшее приближение в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций к функции $f(x) = x^2$ в классе линейных функций $y = kx + b$.

11. Написать рекуррентные соотношения, позволяющие решить следующие уравнения (системы уравнений) методом Ньютона:

а) $x^p - a = 0$, p - целое;

б) $x^2 + y^2 = 1$;

$$x^2 - y^2 = 0,01;$$

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

г) $x^4 + y^4 + z^4 = 1$;

$$x^2 + y^2 - z = 0,01;$$

$$x^4 + y^4 - z = -0,01;$$

$$x - y - z = -0,01;$$

$$x^2 - y = 0,01.$$

12. Написать (покоординатно) схему метода Рунге - Кутты 4-го порядка для решения следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t); \quad x_1(a) = x_1^0;$

$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, t); \quad x_2(a) = x_2^0;$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3, t); & x_1(\alpha) &= x_1^0; \\
\dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3, t); & x_2(\alpha) &= x_2^0; \\
\dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3, t); & x_3(\alpha) &= x_3^0; \\
\text{в)} \quad \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t); & x_1(\alpha) &= x_1^0; \\
\dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, t); & x_2(\alpha) &= x_2^0; \\
\dot{x}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3, x_4, t); & x_3(\alpha) &= x_3^0; \\
\dot{x}_4 &= F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, t); & x_4(\alpha) &= x_4^0.
\end{aligned}$$

13. Вывести формулу метода Адамса:

а) 3-го порядка точности;

б) 4-го порядка точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
2. Кокотушкин Г.А., Храпов П.В. Методические указания к решению задач "Численные методы": Под ред. Г.А. Кокотушкина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 43 с.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994.
4. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1994.
5. Грешиллов А.А. Метод наименьших квадратов и элементы конформного анализа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990.
6. Голосов А.О., Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы вычисления интегралов и решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992.
7. Блюмин А.Г., Галкин О.Г., Домрачев В.В. Практикум по курсу вычислительной математики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995.
8. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М.: Изд-во МАИ, 1995.